Colles de Maths - semaine 14
Lycée Aux Lazaristes

Julien Allasia - ENS de Lyon

Polynômes

Exercice 1 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant unitaire.
Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geq |\Im(z)|^{\deg P}.$$

Exercice 2 Soit $A \in \mathbb{R}[X]$. Montrer l'équivalence entre les deux points suivants :
(i) Pour tout réel x, $A(x) \geq 0$.
(ii) Il existe $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $A = P^2 + Q^2$.

Exercice 3 Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Factoriser le polynôme $(X+1)^n - e^{2i\alpha}(X-1)^n$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 4 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, a un réel non nul.
Montrer que $P' + aP$ est aussi scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 Trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(0) = 0$ et $P(X^2+1) = P(X)^2 + 1$.

Fractions rationnelles

Exercice 6 Décomposer en éléments simples la fraction $\dfrac{1}{X(X-1)...(X-n)}$.

Exercice 7 Décomposer en éléments simples dans $R[X]$ la fraction $\dfrac{X^2}{X^4+1}$.

Exercice 8 Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X^k$.

1. Déterminer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1-\omega^k}$.

Exercice 9

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que
$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \sin((2n+1)\theta) = P_n(\sin\theta).$$
2. Décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{1}{P_n}$ en éléments simples.

Exercice 10 Soit $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}$. On appelle enveloppe convexe de $\{z_1, ..., z_n\}$ le plus petit convexe du plan complexe qui contient tous les z_i. On montre qu'il s'agit de l'ensemble

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i,\ \lambda_i \geq 0 \,\forall i,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant.

1. Décomposer $\dfrac{P'}{P}$ en éléments simples.
2. Montrer que les racines de P' appartiennent à l'enveloppe convexe des racines de P.
3. De quel théorème ce théorème est-il la généralisation ?